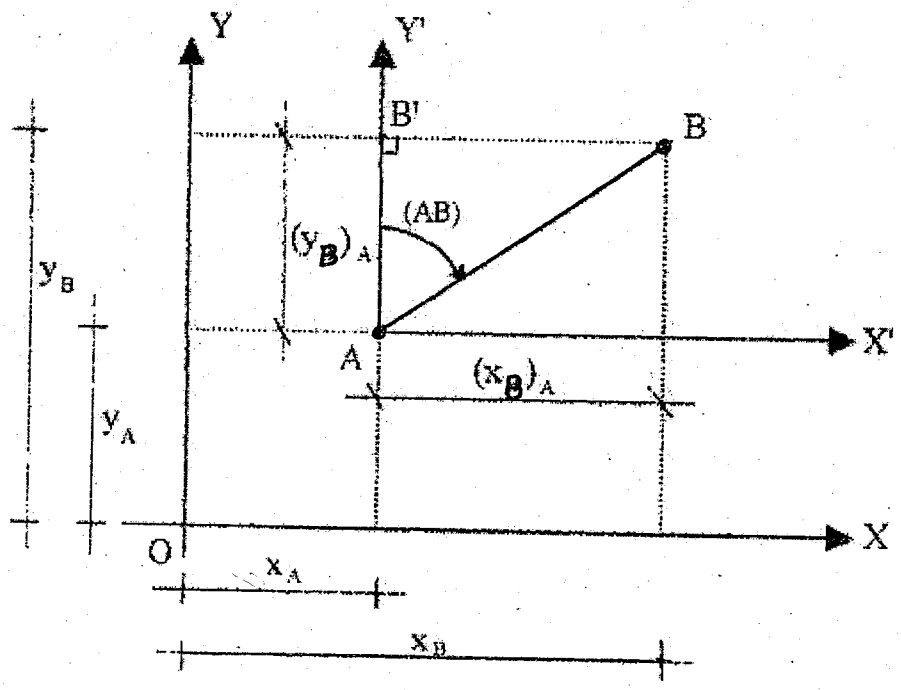
APPUNTI DI TOPOGRAFIA

MODULO 2

PROBLEMI SULLE COORDINATE CARTESIANE E POLARI



PREMESSE

Per individuare la posizione di un punto nei piano, e per la successiva rappresentazione grafica, è necessario dare le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento.

Le coordinate planimetriche di un punto sono sempre due numeri e possono essere essenzialmente di due tipi:

- coordinate cartesiane ;
- coordinate polari.

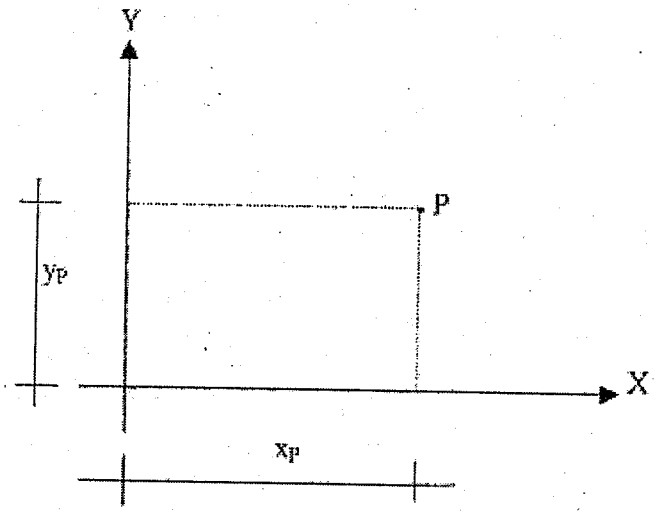
COORDINATE CARTESIANE

Le coordinate cartesiane (più correttamente dette coordinate cartesiane ortogonali perché gli assi cartesiani di riferimento sono ortogonali fra loro) sono particolarmente utili nella restituzione (disegno) di un rilievo topografico.

La posizione di ogni punto **P** è definita dalle due coordinate x_p ed y_P che ad esso si associano.

La coordinata x_P è la distanza che c'è fra il punto **P** e l'asse delle Y (asse delle ordinate), analogamente la y_p è la distanza che c'è fra il punto **P** e l'asse delle X (asse delle ascisse).

Spesso lo studente non riesce ad associare in modo corretto l'asse X o Y al termine ascisse o ordinate. Si suggerisce la seguente assonanza **ascisse = ascix** per favorire la corretta associazione.



Le coordinate cartesiane del punto P possono essere indicate in uno dei seguenti modi:

- esplicito: x_P = ...; y_P = ...
- implicito: $P(x_P;\ y_P)$; $P\equiv(x_P;\ y_P)$

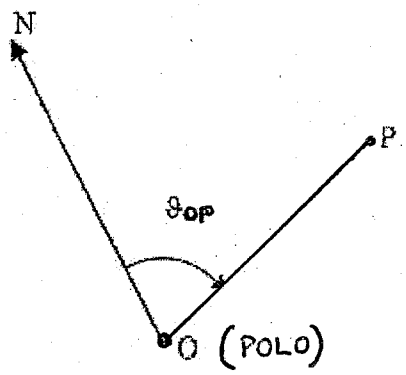
nel modo implicito si mette sempre prima la x e poi la y.

COORDINATE POLARI

Le coordinate polari sono utili in fase di rilievo. Esse si riferiscono ad un sistema costituito da un unico asse **ON** detto **asse polare**.

Le coordinate polari di un punto **P** sono:

- la distanza fra l'origine **O** del sistema (detto polo) e il punto stesso;
- e l'angolo orizzontale (misurato su di un goniometro orizzontale) ϑ_{OP} (detto azimutale) di cui si deve ruotare, in senso orario, l'asse polare per farlo sovrapporre alla congiungente l'origine con il punto in questione.

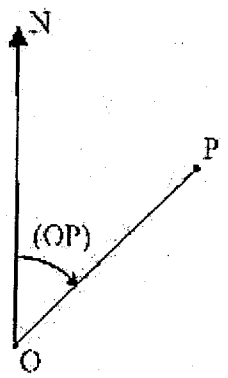


Le coordinate cartesiane del punto P possono essere indicate in uno dei seguenti modi:

- esplicito: ϑ_{OP} = ...; OP = ...
- implicito: P(ϑ_{OP}; OP); P≡(OP; ϑ_{OP})

in questo caso non esiste un ordine di precedenza fra l'angolo e la distanza poiché l'angolo e la distanza sono grandezze di tipo diverso.

L'angolo azimutale diventa **azimut** quando l'asse polare ON viene indirizzato verso il nord oppure è parallelo all'asse Y di un sistema di riferimento cartesiano.



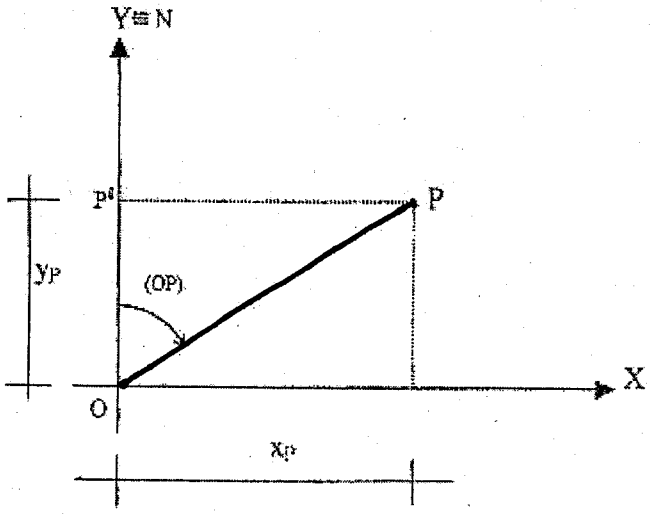
- esplicito: (OP) = ...; OP = ...
- implicito: P[(OP); OP]; P≡[(OP); OP]

La distanza OP non varia ne come simbolo ne come valore numerico, mentre l'angolo cambia sia come simbolo, che come nome, che come valore numerico.

PASSAGGIO DA COORDINATE POLARI A CARTESIANE

Poiché il rilievo viene molto spesso effettuato con coordinate polari mentre il disegno viene molto spesso effettuato con coordinate cartesiane (perché è più preciso) è necessario effettuare il passaggio dalle une alle altre.

Allo scopo si utilizzeranno le formule (1), ricavate applicando il primo e secondo teorema sui triangoli rettangoli OP'P in figura



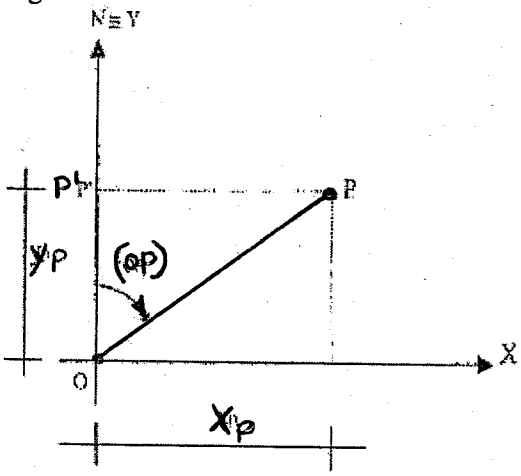
Nella figura si è fatto coincidere l'origine del sistema cartesiano con l'origine dei sistema polare e l'asse delle ordinate con l'asse polare.

$$x_p = OP\ \mathrm{Sin}(OP)$$
$$y_p = OP\ \cos(OP) \qquad (1)$$

PASSAGGIO DA COORDINATE CARTESIANE A POLARI

In alcuni problemi didattici e della pratica operativa vengono fornite le coordinate cartesiane di punti già rappresentati su di un disegno (vertici, ad esempio, di un appezzamento di terreno), e si richiede di calcolare le coordinate polari degli stessi rispetto ad un sistema polare con origine coincidente con quella del sistema cartesiano e asse delle ordinate coincidente con l'asse polare (allo scopo, ad esempio, dell'effettuazione di calcoli relativi all'appezzamento in questione).

Le formule necessarie per raggiungere lo scopo verranno ricavate. come segue, applicando il primo, secondo e terzo teorema sui triangoli rettangoli al triangolo rettangolo OP'P in figura.



Per calcolare la distanza OP possiamo utilizzare una delle seguenti FORMULE (3) ricavate applicando il primo e secondo teorema sui triangoli rettangoli

$$OP = x_p / \sin(OP)$$
$$OP = y_P / \cos(OP) \qquad (3)$$

Per calcolare l'azimut (OP) applichiamo il terzo teorema sui triangoli rettangoli sempre al triangolo OP'P:

$$tg(OP) = x_p / y_P$$

DA CUI:

$$\mathbf{(OP) = arctg(x_p / y_P) + k} \qquad (4)$$

Il **k** che compare nella (4) è un termine correttivo che consente di eliminare l'errore che commetterebbe la calcolatrice.

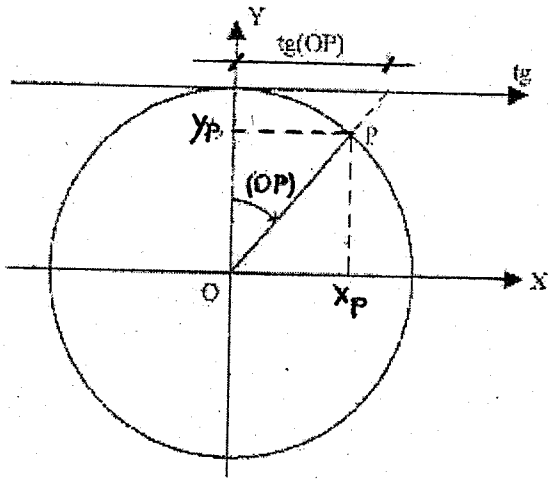
Infatti facendo l'arcotangente di un numero positivo la calcolatrice ci da sempre un angolo del primo quadrante (mentre però potrebbe essere anche del terzo) analogamente facendo l'arcotangente di un numero negativo la calcolatrice ci da sempre un angolo del primo quadrante col segno meno (mentre però potrebbe essere un angolo del secondo o del quarto quadrante).

Stabiliremo il valore da assegnare al **k** in base al segno di $\mathbf{x_P}$ e di $\mathbf{y_p}$ come riassunto nella tabella che segue:

	Segni del Rapporto x/y	Quadrante di Appartenenza dell'angolo	Valore da attribuire al k	
			sessagesimali	centesimali
1° caso	+ / +	L'azimut è del primo quadrante	0°	0^g
2° caso	+ / −	L'azimut è del secondo quadrante	180°	200^g
3° caso	− / −	L'azimut è del terzo quadrante	180°	200^g
4° caso	− / +	L'azimut è del quarto quadrante	360°	400^g

I valori per **k** sono stati ricavati in base alle seguenti considerazioni:

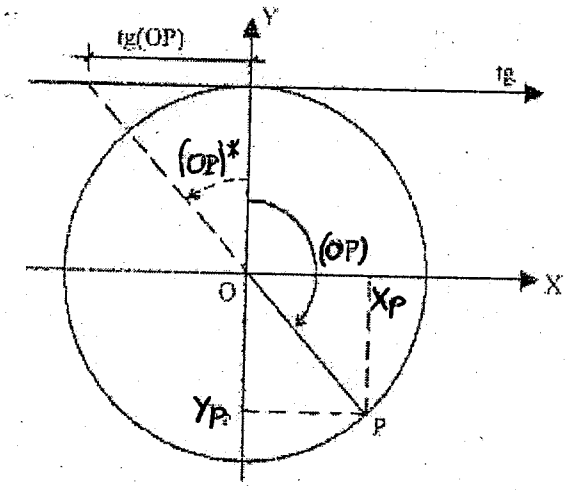
Primo caso



Questo è il caso in cui sia la $\mathbf{x_p}$ che la $\mathbf{y_P}$ sono positivi.

Il valore dato dalla calcolatrice facendo l'arcotangente di $\mathbf{x_p/y_P}$ e quello corretto perciò al **k** si attribuisce valore 0°

Secondo caso

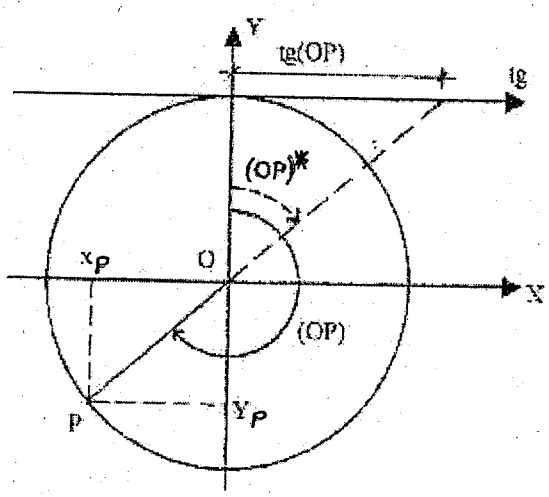


Questo è il caso in cui la x_p è positiva mentre la y_P è negativa.

Il valore dato dalla calcolatrice facendo l'arcotangente di x_p/y_P e' quello che corrisponde a **(OP)*** (che è negativo) per effettuare la correzione e determinare quindi l'azimut **(OP)** cercato bisogna, come si vede dalla figura, sommare al valore dato dalla calcolatrice l'angolo piatto (180°).

Perciò al **k** si attribuisce valore 180°.

Terzo caso

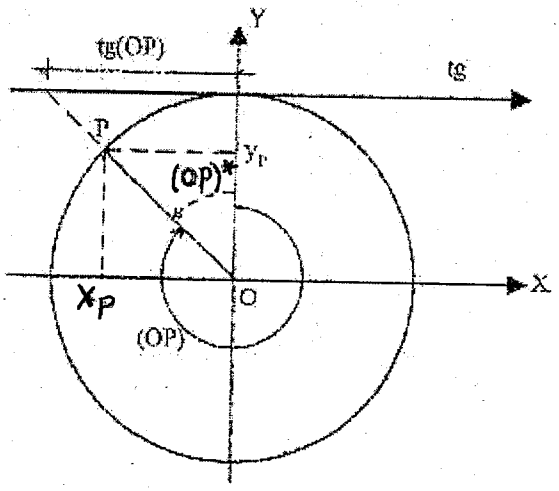


Questo è il caso in cui sia la x_p che la y_P è negativa.

Il valore dato dalla calcolatrice facendo l'arcotangente di x_p/y_P e' quello che corrisponde a **(OP)*** (che è positivo) per effettuare la correzione e determinare quindi l'azimut **(OP)** cercato bisogna, come si vede dalla figura, sommare al valore dato dalla calcolatrice l'angolo piatto (180°).

Perciò al **k** si attribuisce valore 180°.

Quarto caso



Questo è il caso in cui la x_p è negativa mentre la y_P è positiva.

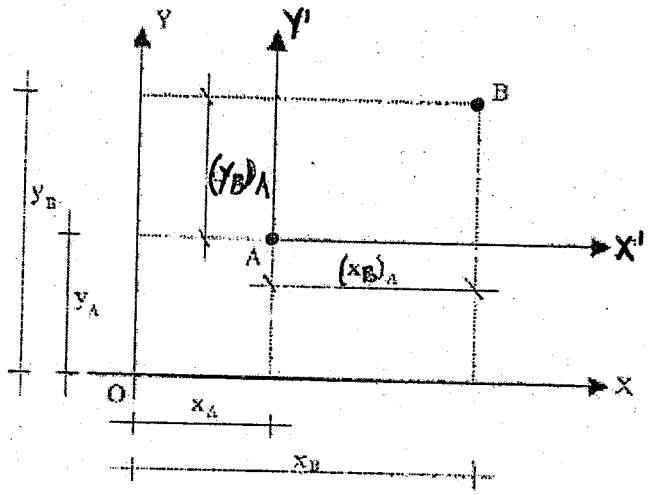
Il valore dato dalla calcolatrice facendo l'arcotangente di x_p/y_P e quello che corrisponde a **(OP)*** (che è negativo) per effettuare la correzione e determinare quindi l'azimut **(OP)** cercato bisogna, come si vede dalla figura, sommare al valore dato dalla calcolatrice l'angolo giro (360°).

Perciò al **k** si attribuisce valore 360°.

COORDINATE TOTALI E PARZIALI

Se in un piano cartesiano vengono date le coordinate cartesiane di due punti **A** e **B** si dice che x_A, y_A, x_B, y_B, sono le coordinate totali (che comunque noi chiameremo semplicemente coordinate) perché si riferiscono all'unico sistema esistente OXY.

Se introduciamo un secondo sistema cartesiano di riferimento con origine in A e con asse X' parallelo a X e Y' parallelo ad Y si avrà che i punti A e B in questione oltre ad avere le coordinate totali riferite al vecchio sistema (che chiameremo sistema principale) OXY avranno delle coordinate dette parziali riferite al sistema secondario AX'Y'.



Le coordinate parziali si indicano con seguenti termini:

$(x_B)_A$ e $(y_B)_A$

Il termine:

$(x_B)_A$ si legge x di B rispetto ad A

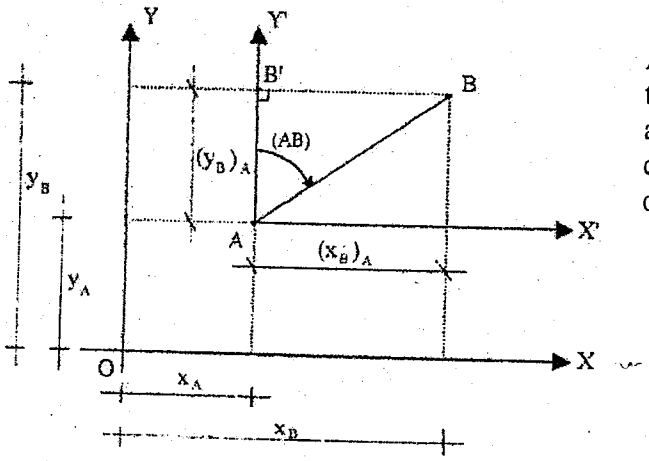
ed analogamente il termine:

$(y_B)_A$ si legge y di B rispetto ad A

Le coordinate parziali sono legate alle coordinate totali dalle seguenti relazioni ricavate ragionando sulla precedente figura:

$$(x_B)_A = x_B - x_A$$
$$(y_B)_A = y_B - y_A \qquad (5)$$

CALCOLO DELLA DISTANZA E DELL'AZIMUT FRA DUE PUNTI DI NOTE COORDINATE CARTESIANE



Ragionando sul triangolo rettangolo ABB' della figura a fianco ed applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, (come abbiamo fatto nel passaggio da coordinate cartesiane a polari), per la distanza si ottiene:

$$AB = \frac{(x_B)_A}{\sin(AB)} \qquad AB = \frac{(y_B)_A}{\cos(AB)}$$

nelle quali sostituendo le (5) otteniamo:

$$\mathbf{AB = \frac{x_B - x_A}{\sin(AB)} \qquad AB = \frac{y_B - y_A}{\cos(AB)}} \qquad (7)$$

Per calcolare l'azimut (AB) applicando il terzo teorema sui triangoli rettangoli al triangolo in figura, (come abbiamo fatto nel passaggio da coordinate cartesiane a polari), otteniamo:

$$tg(AB) = (x_B)_A / (y_B)_A$$

da cui:

$$(AB) = \text{arctg}\frac{(x_B)_A}{(y_B)_A} + k$$

nella quale sostituendo le (5) otteniamo:

$$\mathbf{(AB) = arctg\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} + k} \qquad (8)$$

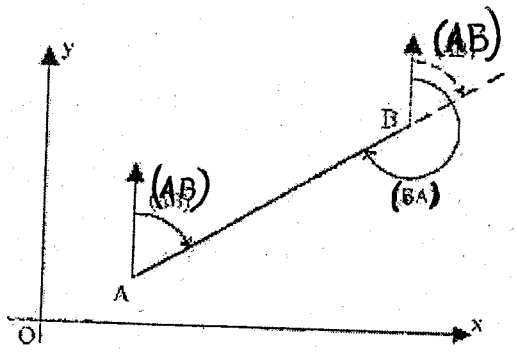
il valore da attribuire al k della (8) lo si deduce, in base ai segni che assumono il numeratore ed il denominatore dopo aver sostituito i numeri, dalla tabella di pag. 5.

AZIMUT E CONTROAZIMUT

Se indichiamo con (AB) l'azimut del segmento che da A va verso B, l'azimut che da B va verso A si chiamerà (BA).

I due azimut hanno le stesse lettere ma invertite cioè l'uno è il contrario dell'altro in altri termini possiamo dire che l'uno è il controazimut dell'altro.

Quindi se diciamo che (AB) è l'azimut (BA) è il suo controazimut. Viceversa se diciamo che (BA) è l'azimut (AB) è il suo controazimut.



Fra azimut e controazimut la relazione, come si vede dalla figura, è la seguente;

$$(BA) = (A\ B) \pm 180°$$

dove:
si metterà il segno + se (AB) è minore di 180°
si metterà il segno - se (AB) è maggiore di 180°.