POLIGONALI VINCOLATE 3e

8.11.5 Poligonale aperta con vertici estremi noti non reciprocamente visibili, appoggiata a due punti esterni noti

Prendiamo in esame la poligonale aperta riportata in fig. 8.70 nella quale i vertici estremi A ed E, non reciprocamente visibili, hanno coordinate planimetriche note e dai quali sono rispettivamente visibili i punti P e Q, anch'essi di coordinate note.
Questo tipo di poligonale presenta un numero di elementi sovrabbondanti rispetto a quelli strettamente necessari per il calcolo e quindi si possono effettuare le verifiche e, se possibile, le compensazioni.

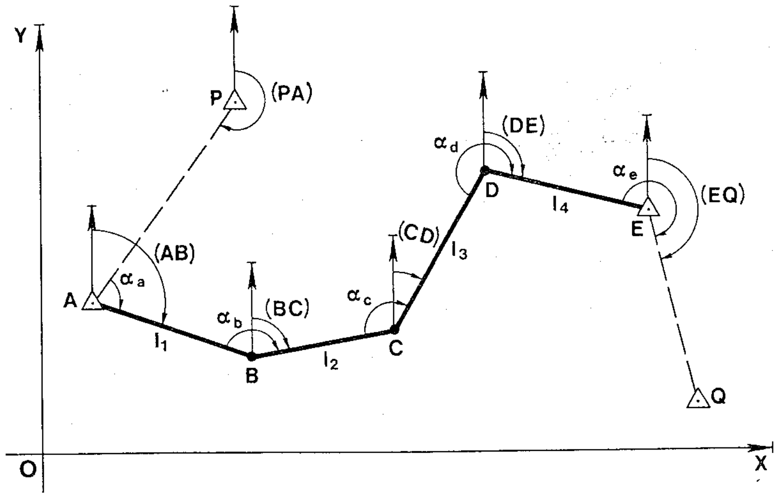

Fig. 8.70

Si hanno a disposizione i seguenti dati:

- elementi misurati: lati l_1, l_2, l_3, l_4
  angoli ai vertici α_a, α_b, α_c, α_d, α_e
- elementi noti: coordinate dei punti $A \equiv (X_A, Y_A)$, $E \equiv (X_E, Y_E)$, $P \equiv (X_P, Y_P)$, $Q \equiv (X_Q, Y_Q)$
- elementi da calcolare: coordinate dei vertici (X_B, Y_B), (X_C, Y_C), (X_D, Y_D)

1 *Compensazione angolare*

Tramite le coordinate note dei punti A, E, P, Q vengono calcolati gli azimut $(PA)^*$ ed $(EQ)^*$ con le relazioni:

$$(PA)^* = \text{arctg}\,\frac{X_A - X_P}{Y_A - Y_P} \qquad (EQ)^* = \text{arctg}\,\frac{X_Q - X_E}{Y_Q - Y_E} \tag{74}$$

Tali azimut sono esatti in quanto calcolati con le coordinate note dei punti trigonometrici. Si immagina ora che la poligonale, anziché svilupparsi dal vertice A sino a E, si prolunghi alle due estremità sino ai punti P e Q, per cui, partendo dall'azimut $(PA)^*$ calcolato, si applica la regola di propagazione degli azimut e vengono calcolati gli azimut di tutti i lati come segue:

$$\begin{aligned}
(AB) &= (PA)^* + \alpha_a \pm 200 \text{ gon}\\
(BC) &= (AB) + \alpha_b \pm 200 \text{ gon}\\
(CD) &= (BC) + \alpha_c \pm 200 \text{ gon}\\
(DE) &= (CD) + \alpha_d \pm 200 \text{ gon}\\
(EQ) &= (DE) + \alpha_e \pm 200 \text{ gon}
\end{aligned} \tag{75}$$

I due azimut (EQ) ed $(EQ)^*$, se le misurazioni angolari risultassero perfette, dovrebbero essere uguali; in realtà fra i due valori esiste sempre una certa differenza, per cui risulta:

$$(EQ) \neq (EQ)^*$$

ossia:

$$(EQ)-(EQ)^{*}=\pm\varepsilon$$

che fornisce in valore e segno l'errore ε di chiusura angolare. Mentre l'azimut $(EQ)^*$ è esatto in quanto calcolato tramite coordinate prive di errori, l'azimut (EQ) calcolato con le [75] dipende da tutti gli angoli ai vertici misurati, i quali contengono degli errori di lettura al goniometro. È quindi necessario procedere alla compensazione angolare, sempre che l'errore risulti non superiore alla tolleranza, ossia si abbia $\varepsilon \leqslant t_\alpha$, già vista studiando la poligonale chiusa orientata; per evitare un doppio calcolo, la compensazione avviene sugli azimut e non sugli angoli α misurati, tenendo presente quanto segue:

- viene calcolata la correzione da effettuare a ogni modo:

  $$\mp e=\frac{\pm\varepsilon}{n}$$

  dove n = numero degli angoli misurati (nel caso di fig. 8.70 è $n=5$);
- l'azimut $(PA)^*$ è esatto;
- l'azimut (AB) dipende solo dall'angolo α_a e quindi contiene l'errore e una sola volta;
- l'azimut (BC) dipende dall'azimut (AB) e dall'angolo α_b che contengono entrambi una volta l'errore; pertanto l'azimut (BC) deve essere corretto della quantità $2\cdot e$;
- l'azimut (CD) dipende dall'azimut (BC), con un errore $2\cdot e$, e dall'angolo α_c che contiene una volta l'errore, per cui l'azimut (CD) deve essere corretto della quantità $3\cdot e$ e così via.

Riepilogando, l'azimut sul primo vertice A deve essere corretto di $1\cdot e$, quello sul secondo di $2\cdot e$, sul terzo di $3\cdot e$ ecc., sino all'ultimo che contiene l'errore totale $\varepsilon=n\cdot e$.
Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
(AB)' &= (AB)\mp 1\cdot e\\
(BC)' &= (BC)\mp 2\cdot e\\
(CD)' &= (CD)\mp 3\cdot e\\
(DE)' &= (DE)\mp 4\cdot e\\
(EQ)' &= (EQ)\mp 5\cdot e=(EQ)^*
\end{aligned}\qquad [76]$$

2 *Calcolo delle coordinate parziali*

Applicando le relazioni già viste e utilizzando gli azimut compensati, si calcolano le coordinate parziali, che in valore e segno sono date da:

$$\begin{aligned}
x_b &= l_1\cdot \operatorname{sen}(AB)' & y_b &= l_1\cdot\cos(AB)'\\
x_c &= l_2\cdot \operatorname{sen}(BC)' & y_c &= l_2\cdot\cos(BC)'\\
x_d &= l_3\cdot \operatorname{sen}(CD)' & y_d &= l_3\cdot\cos(CD)'\\
x_e &= l_4\cdot \operatorname{sen}(DE)' & y_e &= l_4\cdot\cos(DE)'
\end{aligned}$$

3 *Compensazione lineare*

Sommando all'ascissa e all'ordinata del punto A rispettivamente la somma delle x parziali e delle y parziali si ottengono le coordinate totali del punto E, ossia:

$$X_E^*=X_A+\Sigma x \qquad Y_E^*=Y_A+\Sigma y$$

Teoricamente dovrebbe risultare:

$$X_E^* = X_E \qquad Y_E^* = Y_E$$

Però le coordinate totali calcolate X_E^* e Y_E^* sono state ottenute in funzione di quelle parziali che non sono precise in quanto determinate tramite le lunghezze dei lati che contengono degli errori di misurazione, per cui la poligonale rilevata si discosta da quella reale sul terreno (fig. 8.71).

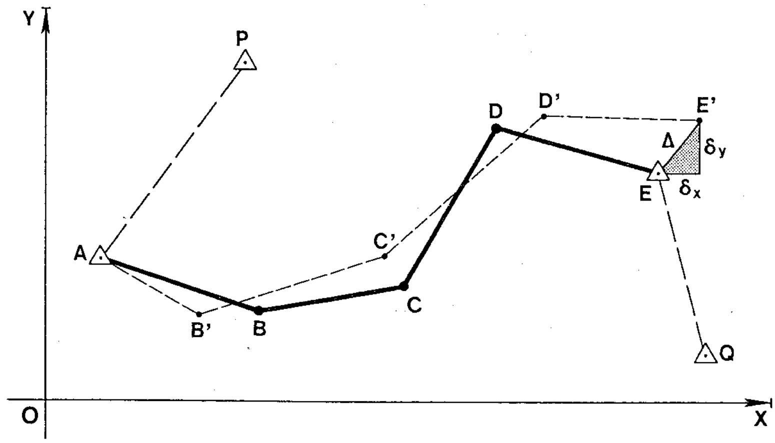

Fig. 8.71

Si ha quindi un errore di chiusura lineare le cui componenti sono:

$$X_B^* - X_B = \pm \delta_x \qquad Y_B^* - Y_B = \mp \delta_y$$

mentre l'errore totale è dato da (fig. 8.71):

$$\Delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$$

Se l'errore risulta non superiore alla tolleranza (vedi poligonale chiusa), ossia $\Delta \leqslant t_l$, si effettua la compensazione in parti proporzionali alle lunghezze dei lati, nel seguente modo:

- errore unitario relativo alle ascisse:

$$\mp u_x = \frac{\mp \delta_x}{\Sigma l}$$

- errore unitario relativo alle ordinate:

$$\mp u_y = \frac{\pm \delta_y}{\Sigma l}$$

ovviamente se la componente δ è positiva l'errore u si toglie e viceversa;

- coordinate parziali compensate:

$$x_b' = x_b \mp l_1 \cdot u_x \qquad y_b' = y_b \mp l_1 \cdot u_y$$

$$x_c' = x_c \mp l_2 \cdot u_x \qquad y_c' = y_c \mp l_2 \cdot u_y$$

$$x_d' = x_d \mp l_3 \cdot u_x \qquad y_d' = y_d \mp l_3 \cdot u_y$$

$$x_e' = x_e \mp l_4 \cdot u_x \qquad y_e' = y_e \mp l_4 \cdot u_y$$

4 *Calcolo delle coordinate totali*

Vengono ora calcolate le coordinate totali tramite quelle parziali compensate, tenendo sempre conto dei segni algebrici:

$$X_B = X_A + x'_b \qquad Y_B = Y_A + y'_b$$
$$X_C = X_B + x'_c \qquad Y_C = Y_B + y'_c$$
$$X_D = X_C + x'_d \qquad Y_D = Y_C + y'_d$$
$$X_E = X_D + x'_e \qquad Y_E = Y_D + y'_e$$

Ovviamente le coordinate X_E e Y_E così calcolate devono risultare uguali a quelle inizialmente già note.

Esercitazione 17

Fra i vertici trigonometrici M e N di coordinate $X_M = -197{,}31$ m, $Y_M = +31{,}79$ m, $X_N = -117{,}11$ m e $Y_N = -78{,}16$ m non visibili fra loro, si è sviluppata la poligonale $MABCN$ della quale sono stati misurati i lati:

$$\overline{MA} = 58{,}43 \text{ m} \qquad \overline{AB} = 93{,}56 \text{ m} \qquad \overline{BC} = 62{,}06 \text{ m} \qquad \overline{CN} = 80{,}90 \text{ m}$$

e gli angoli destrorsi con i seguenti valori:

$$\widehat{PMA} = \alpha_M = 170{,}722\,6 \text{ gon} \qquad \widehat{MAB} = \alpha_A = 129{,}122\,2 \text{ gon}$$
$$\widehat{ABC} = \alpha_B = 296{,}882\,0 \text{ gon} \qquad \widehat{BCN} = \alpha_C = 291{,}454\,3 \text{ gon}$$
$$\widehat{CNQ} = \alpha_N = 386{,}029\,7 \text{ gon}$$

Dai punti M e N sono rispettivamente visibili altri due punti trigonometrici P e Q di coordinate $X_P = -231{,}27$ m, $Y_P = +138{,}76$ m, $X_Q = +99{,}56$ m e $Y_Q = +108{,}94$ m.
Calcolare le coordinate compensate dei vertici della poligonale. Disegno in scala 1:3 000 (fig. 8.XVII).

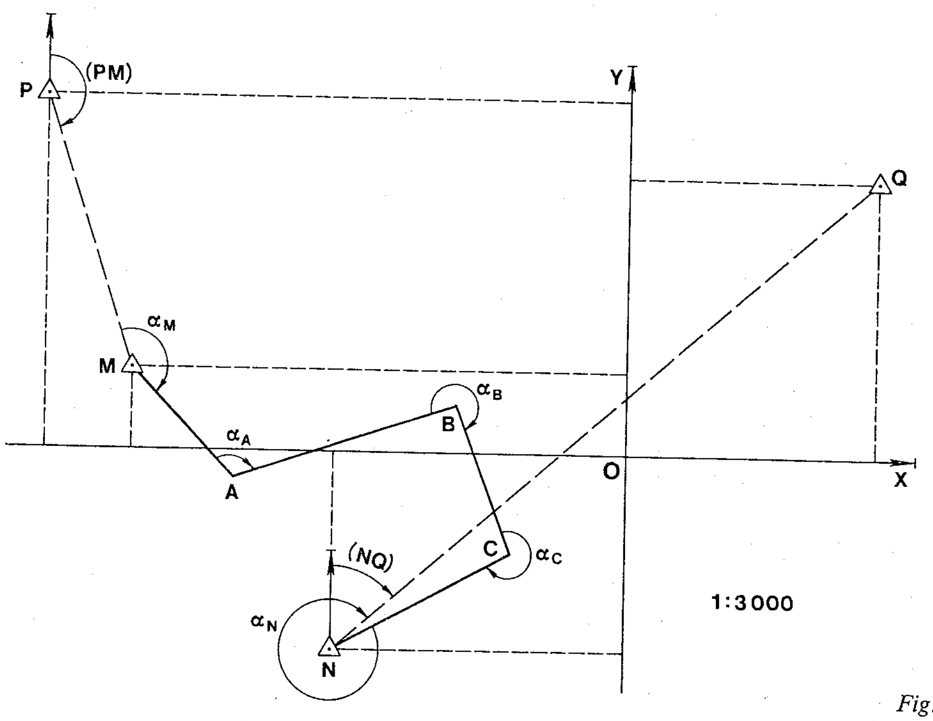

Fig. 8.XVII

Procedimento

Calcolo degli azimut

$$(PM)^* = \text{arctg}\,\frac{X_M - X_P}{Y_M - Y_P} = \text{arctg}\,\frac{-197{,}31 + 231{,}27}{31{,}79 - 138{,}76} = -19{,}570\,2 \text{ gon}$$

$$(PM)' = 200 \text{ gon} - 19{,}570\,2 \text{ gon} = 180{,}429\,8 \text{ gon}$$

$$(NQ) = \text{arctg}\,\frac{X_Q - X_N}{Y_Q - Y_N} = \text{arctg}\,\frac{99{,}56 + 117{,}11}{108{,}94 + 78{,}16} = 54{,}654\,0 \text{ gon}$$

$$(MA) = (PM)' + \alpha_M \pm 200 \text{ gon} =$$
$$= 180{,}429\,8 \text{ gon} + 170{,}722\,6 \text{ gon} - 200 \text{ gon} = 151{,}152\,4 \text{ gon}$$

$$(AB) = (MA) + \alpha_A \pm 200 \text{ gon} =$$
$$= 151{,}152\,4 \text{ gon} + 129{,}122\,2 \text{ gon} - 200 \text{ gon} = 80{,}274\,6 \text{ gon}$$

$$(BC) = (AB) + \alpha_B \pm 200 \text{ gon} =$$
$$= 80{,}274\,6 \text{ gon} + 296{,}882\,0 \text{ gon} - 200 \text{ gon} = 177{,}156\,6 \text{ gon}$$

$$(CN) = (BC) + \alpha_c \pm 200 \text{ gon} =$$
$$= 177{,}156\,6 \text{ gon} + 291{,}454\,3 \text{ gon} - 200 \text{ gon} = 268{,}610\,9 \text{ gon}$$

$$(NQ) = (CN) + \alpha_N \pm 200 \text{ gon} =$$
$$= 268{,}610\,9 \text{ gon} + 386{,}029\,7 \text{ gon} - 600 \text{ gon} = 54{,}640\,6 \text{ gon}$$

$$\varepsilon = (NQ) - (NQ)' = 54{,}640\,6 - 54{,}654\,0 = -0{,}013\,4 \text{ gon}$$

$$t_\alpha = 0{,}025\,0 \text{ gon} \cdot \sqrt{n} = 0{,}025\,0 \times \sqrt{5} = 0{,}055\,9 \text{ gon} > \varepsilon$$

Compensazione angolare

$$+e = \frac{-\varepsilon}{n} = \frac{-0{,}013\,4 \text{ gon}}{5} = 0{,}002\,68 \text{ gon}$$

$$(MA)' = (MA) + 1 \cdot e = 151{,}152\,4 \text{ gon} + 1 \times 0{,}002\,68 \text{ gon} = 151{,}155\,1 \text{ gon}$$
$$(AB)' = (AB) + 2 \cdot e = 80{,}274\,6 \text{ gon} + 2 \times 0{,}002\,68 \text{ gon} = 80{,}280\,0 \text{ gon}$$
$$(BC)' = (BC) + 3 \cdot e = 177{,}156\,6 \text{ gon} + 3 \times 0{,}002\,68 \text{ gon} = 177{,}164\,6 \text{ gon}$$
$$(CN)' = (CN) + 4 \cdot e = 268{,}610\,9 \text{ gon} + 4 \times 0{,}002\,68 \text{ gon} = 268{,}621\,6 \text{ gon}$$
$$(NQ)' = (NQ) + 5 \cdot e = 54{,}640\,6 \text{ gon} + 5 \times 0{,}002\,68 \text{ gon} = 54{,}654\,0 \text{ gon}$$

Calcolo delle coordinate parziali

$$(x_A)_M = \overline{MA} \cdot \text{sen}\,(MA)' = 58{,}43 \times \text{sen}\,151{,}155\,1 \text{ gon} = +40{,}559\,8 \text{ m}$$
$$(x_B)_A = \overline{AB} \cdot \text{sen}\,(AB)' = 93{,}56 \times \text{sen}\,80{,}280\,0 \text{ gon} = +89{,}107 \text{ m}$$
$$(x_C)_B = \overline{BC} \cdot \text{sen}\,(BC)' = 62{,}06 \times \text{sen}\,177{,}164\,6 \text{ gon} = +21{,}786\,5 \text{ m}$$
$$(x_N)_C = \overline{CN} \cdot \text{sen}\,(CN)' = 80{,}90 \times \text{sen}\,268{,}621\,6 \text{ gon} = -71{,}270\,4 \text{ m}$$
$$\Sigma x = 80{,}183\,0 \text{ m}$$

$$(y_A)_M = \overline{MA} \cdot \cos\,(MA)' = 58{,}43 \times \cos\,151{,}155\,1 \text{ gon} = -42{,}059\,1 \text{ m}$$
$$(y_B)_A = \overline{AB} \cdot \cos\,(AB)' = 93{,}56 \times \cos\,80{,}280\,0 \text{ gon} = +28{,}520\,0 \text{ m}$$
$$(y_C)_B = \overline{BC} \cdot \cos\,(BC)' = 62{,}06 \times \cos\,177{,}164\,6 \text{ gon} = -58{,}110\,2 \text{ m}$$
$$(y_N)_C = \overline{CN} \cdot \cos\,(CN)' = 80{,}90 \times \cos\,268{,}621\,6 \text{ gon} = -38{,}279\,8 \text{ m}$$
$$\Sigma y = -109{,}929\,1 \text{ m}$$

$$X_N^* = X_M + \Sigma x = -197{,}31 + 80{,}183\,0 = -117{,}127\,0 \text{ m}$$
$$Y_N^* = Y_M + \Sigma y = +31{,}79 - 109{,}929\,1 = -78{,}139\,1 \text{ m}$$
$$\delta_x = X_N^* - X_N = -117{,}127\,0 - (-117{,}11) = -0{,}017\,0 \text{ m}$$
$$\delta_y = Y_N^* - Y_N = -78{,}139\,1 - (-78{,}16) = +0{,}020\,9 \text{ m}$$
$$\Delta = \sqrt{\delta_x + \delta_y} = \sqrt{0{,}017\,0^2 + 0{,}0\,209^2} = 0{,}026\,9 \text{ m}$$
$$\Sigma l = 58{,}43 + 93{,}56 + 62{,}06 + 80{,}90 = 294{,}95 \text{ m}$$
$$t_l = 0{,}020 \times \sqrt{l} = 0{,}020 \times \sqrt{294{,}95} = 0{,}343\,5 \text{ m} > \Delta$$

Compensazione lineare

$$+u_x = \frac{-\delta_x}{\Sigma l} = \frac{-0{,}0170}{294{,}95} \approx +0{,}000\,057\,46$$

$$-u_y = \frac{+\delta_y}{\Sigma l} = \frac{+0{,}0209}{294{,}95} \approx -0{,}000\,070\,86$$

$$(x_A)'_M = (x_A)_M + \overline{MA} \cdot u_x = +40{,}559\,8 + 58{,}43 \cdot u_x = +\ 40{,}5\,632 \text{ m}$$
$$(x_B)'_A = (x_B)_A + \overline{AB} \cdot u_x = +89{,}107\,1 + 93{,}56 \cdot u_x = +\ 89{,}1\,125 \text{ m}$$
$$(x_C)'_B = (x_C)_B + \overline{BC} \cdot u_x = +21{,}786\,5 + 62{,}06 \cdot u_x = +\ 21{,}7\,901 \text{ m}$$
$$(x_N)'_C = (x_N)_C + \overline{CN} \cdot u_x = -71{,}270\,4 + 80{,}90 \cdot u_x = -\ 71{,}265\,8 \text{ m}$$
$$\Sigma x = 80{,}20 \text{ m}$$

$$(y_A)'_M = (y_A)_M - \overline{MA} \cdot u_y = -42{,}059\,1 - 58{,}43 \cdot u_y = -\ 42{,}063\,2 \text{ m}$$
$$(y_B)'_A = (y_B)_A - \overline{AB} \cdot u_y = +28{,}520\,0 - 93{,}56 \cdot u_y = +\ 28{,}513\,3 \text{ m}$$
$$(y_C)'_B = (y_C)_B - \overline{BC} \cdot u_y = -58{,}110\,2 - 62{,}06 \cdot u_y = -\ 58{,}114\,6 \text{ m}$$
$$(y_N)'_C = (y_N)_C - \overline{CN} \cdot u_y = -38{,}279\,8 - 80{,}90 \cdot u_y = -\ 38{,}285\,5 \text{ m}$$
$$\Sigma y = -109{,}95 \text{ m}$$

Calcolo delle coordinate totali

$$X_A = X_M + (x_A)'_M = = -197{,}31 + 40{,}563\,2 = -156{,}746\,8 \text{ m}$$
$$X_B = X_A + (x_B)'_A = -156{,}746\,8 + 89{,}112\,5 = -67{,}634\,3 \text{ m}$$
$$X_C = X_B + (x_C)'_B = -67{,}634\,3 + 21{,}790\,1 = -45{,}844\,2 \text{ m}$$
$$X_N = X_C + (x_N)'_C = -45{,}844\,2 - 71{,}265\,8 = -117{,}11 \text{ m}$$
$$Y_A = Y_M + (y_A)'_M = +31{,}796 - 42{,}063\,2 = -10{,}273\,2 \text{ m}$$
$$Y_B = Y_A + (y_B)'_A = -10{,}273\,2 + 28{,}513\,3 = +18{,}240\,1 \text{ m}$$
$$Y_C = Y_B + (y_C)'_B = +18{,}240\,1 - 58{,}114\,6 = -39{,}874\,5 \text{ m}$$
$$Y_N = Y_C + (y_N)'_C = -39{,}874\,5 - 38{,}285\,5 = -78{,}16 \text{ m}$$