3

1. Relazioni tra lati e angoli di un triangolo qualunque (scaleno)

F.A.Q.

Sono sufficienti tre elementi per risolvere un triangolo scaleno?

Sì, purché almeno uno di essi sia un lato (o altro elemento lineare).

Proprietà dei triangoli

Gli elementi di un triangolo qualunque sono i tre lati e i tre angoli. Per convenzione i **vertici** di un triangolo sono indicati con lettere *maiuscole*, in genere A, B, C, mentre con le lettere *minuscole* corrispondenti, a, b, c, si indicano i **lati** opposti ai rispettivi vertici (▶FIGURA 1). Infine, con le lettere minuscole dell'*alfabeto greco* α, β, γ, vengono indicate le ampiezze degli **angoli** con i vertici rispettivamente in A, B, C.

La geometria ci fornisce le seguenti proprietà fondamentali relative agli elementi di un triangolo qualunque:

1. La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale all'angolo piatto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^c$$

2. In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (per esempio, $a < c + b$ e anche $a > c - b$).
3. In ogni triangolo la relazione di uguaglianza o disuguaglianza che intercorre tra due lati vale anche per gli angoli rispettivamente opposti (per esempio, se $a > b$ sarà anche $\alpha > \beta$).

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

Obiettivo della **trigonometria** è quello di *calcolare le misure* degli *elementi incogniti* di un triangolo, quando siano dati **tre elementi**, tra i quali almeno uno deve essere **un lato**. Per raggiungere questo obiettivo, si devono stabilire le **relazioni** che legano le misure dei lati del triangolo con i valori delle funzioni goniometriche dei suoi angoli.

Nei paragrafi precedenti queste relazioni sono già state determinate per i triangoli rettangoli. Peraltro, si potrebbero utilizzare tali relazioni anche per risolvere un triangolo qualunque; in effetti, con ciascuna delle tre **altezze** di un triangolo qualunque, si individuano **due triangoli rettangoli** (▶FIGURA 1), i quali, risolti separatamente, permettono di definire gli elementi incogniti del triangolo qualunque.

Tuttavia questo modo di procedere, nel caso dei triangoli qualunque, è poco conveniente. In effetti esistono i seguenti **teoremi fondamentali** con i quali si stabiliscono

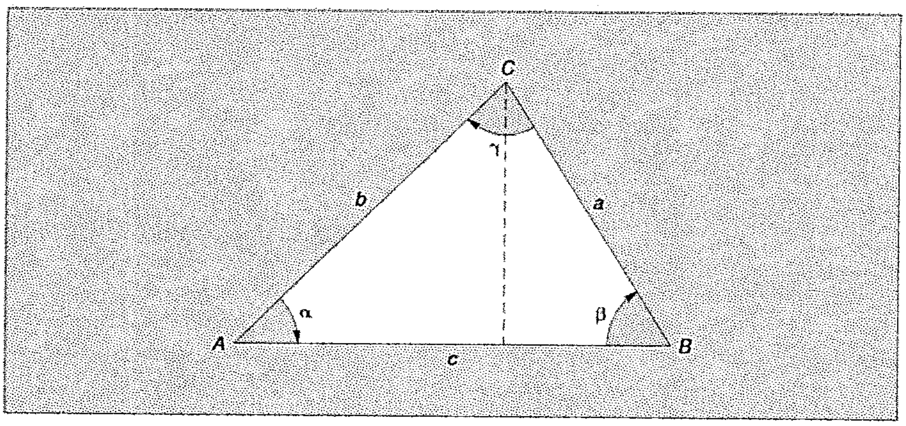


FIGURA 1 Gli elementi fondamentali di un triangolo: vertici (A, B, C), lati (a, b, c) e angoli (α, β, γ). Per convenzione i lati sono indicati con le lettere minuscole corrispondenti a quelle maiuscole dei vertici opposti.

F A Q

Il teorema dei seni e quello di Carnot, sono i soli che stabiliscono relazioni tra gli elementi di un triangolo?

No, esistono altri teoremi il cui impiego, tuttavia, era congeniale a strumenti di calcolo oggi abbandonati.

le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo qualunque; con essi si possono risolvere i triangoli in modo più rapido e più semplice:

- teorema dei seni;
- teorema di Carnot;
- teorema di Nepero;
- formule di Briggs.

Precisiamo che la trattazione degli ultimi due argomenti (teorema di Nepero e formule di Briggs) non verrà affrontata. Nella pratica, infatti, essi trovavano impiego in passato quando i calcoli si effettuavano con l'uso delle **tavole logaritmiche**, mentre attualmente l'uso delle **calcolatrici** ha reso tali teoremi non essenziali: a essi si preferiscono i primi due teoremi, con i quali è possibile risolvere qualsiasi problema trigonometrico.

Teorema dei seni

Costruzione del cerchio circoscritto

Consideriamo il triangolo qualunque di vertici ABC. Esso è sempre inscrivibile in un cerchio, che viene chiamato **circoscritto**, il cui centro O è il punto di intersezione degli **assi** dei tre lati (▶FIGURA 2*a*). Allora ogni lato può essere considerato come una **corda** della circonferenza circoscritta, e ogni angolo come **angolo alla circonferenza** che insiste sulla corda coincidente con il lato a esso opposto.

Da un vertice qualunque del triangolo, per esempio dal vertice B, tracciamo il **diametro** $2R$ del cerchio circoscritto (▶FIGURA 2*b*); indichiamo con A' il punto d'incontro tra questo diametro e la circonferenza. Congiungendo A' con i vertici C e A, si ottengono i due triangoli rettangoli $A'AB$ e $A'CB$ (gli angoli $A'\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}A'$ sono **retti** in quanto angoli alla circonferenza sottesi a un arco pari alla semicirconferenza, il cui *angolo al centro* è piatto). Inoltre l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A'}C$ è uguale a quella dell'angolo α, in quanto entrambi sono angoli alla circonferenza sottesi allo stesso arco $\overset{\frown}{BC}$ di corda a; per le stesse ragioni si ha che $A\widehat{A'}B = \gamma$.

Considerando i triangoli rettangoli definiti in precedenza, possiamo esprimere per ciascuno di essi l'ipotenusa $\overline{BA'} = 2R$ che hanno in comune:

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Se poi, in modo del tutto analogo, tracciamo il diametro $2R$ del cerchio circoscritto, passante per il vertice A (o il vertice C), e ripetiamo le considerazioni geometriche sopra sviluppate, possiamo scrivere:

$$2R = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

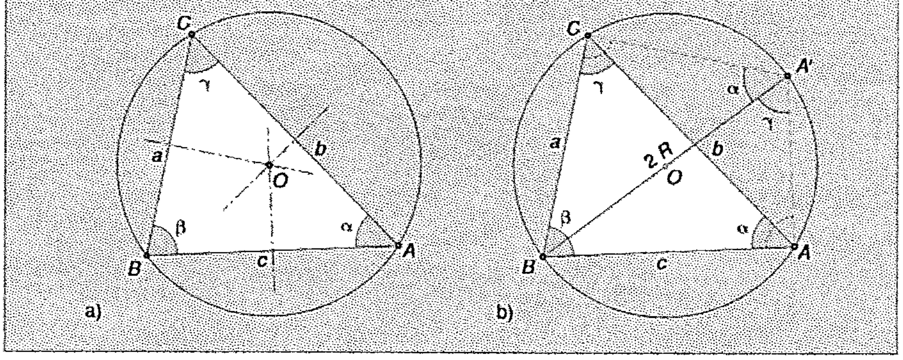


FIGURA 2 Costruzione grafica del cerchio circoscritto al triangolo, connessa al teorema dei seni. Il suo centro è individuato dall'intersezione degli assi dei tre lati del triangolo.

Enunciato del teorema dei seni

Combinando le relazioni precedentemente scritte, si ottengono facilmente le seguenti:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2R \tag{1}$$

Le relazioni (1) sintetizzano il **teorema dei seni**, il cui enunciato può essere così formulato:

> in un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è **costante** ed è uguale al diametro del **cerchio circoscritto**.

Il teorema dei seni è stato dimostrato considerando un triangolo *acutangolo* (con centro O interno al triangolo), tuttavia esso rimane perfettamente valido anche per triangoli *ottusangoli* (con centro O esterno al triangolo), per i quali si omette la dimostrazione, del tutto analoga a quella appena illustrata.

FAQ

L'enunciato del teorema dei seni afferma che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è una costante. Cosa rappresenta questa costante?

Il diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Enunciato alternativo del teorema dei seni

Nelle relazioni (1), permutando i medi, si possono scrivere le stesse relazioni in una forma diversa ottenendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma} \tag{1'}$$

Quindi il teorema dei seni può anche essere formulato nel seguente modo alternativo:

> in un triangolo il rapporto tra due lati è uguale al rapporto tra i valori del seno degli angoli opposti.

Il teorema dei seni appare la prima volta in applicazioni geometriche di matematici arabi nel X sec., ma solo nel XIV sec. il matematico francese **L.B. Gerson** fornisce la dimostrazione che è stata descritta, basata sul cerchio circoscritto. Nel Settecento, poi, anche il matematico svizzero **Leonardo Eulero**, nella sua straordinaria produzione scientifica, affronta la dimostrazione del teorema dei seni dandone una diversa ulteriore versione.

Teorema di Carnot (o del coseno)

Costruzione geometrica sul triangolo

Con il teorema dei seni, il teorema di Carnot è di fondamentale importanza per la risoluzione trigonometrica dei problemi geometrici. Esso, di fatto, rappresenta l'estensione del teorema di Pitagora per i triangoli qualunque.

Consideriamo il triangolo ABC di ▶FIGURA 3 e tracciamo l'altezza CH relativa al lato c. Essa divide il triangolo ABC nei due triangoli rettangoli BCH e ACH. Applicando il teorema di Pitagora al primo di questi, si ha:

$$a^2 = HC^2 + HB^2$$

Considerando poi il triangolo rettangolo ACH, possiamo scrivere:

$$HC = b\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{e} \qquad HB = c - b\cos\alpha$$

Con ciò la precedente relazione diventa:

$$a^2 = (b\,\text{sen}\,\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2\,\text{sen}^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = b^2(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

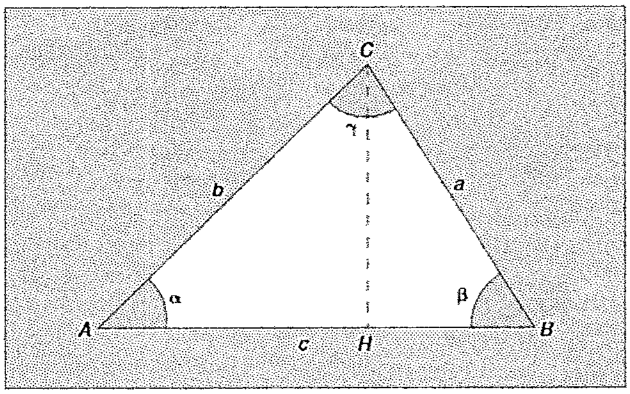


FIGURA 3 L'altezza *CH* divide il triangolo *ABC* nei due triangoli rettangoli *BCH* e *ACH*.

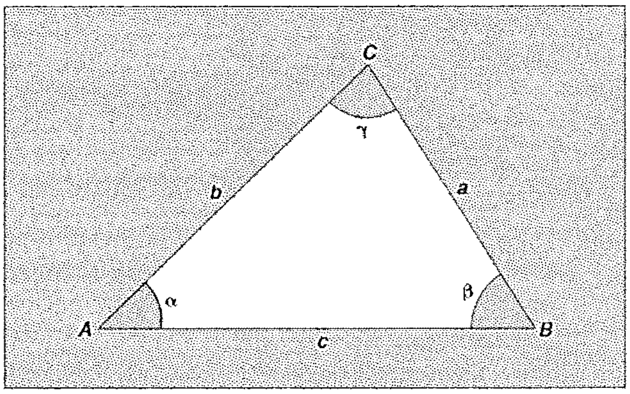


FIGURA 4 Le indicazioni convenzionali utilizzate nel triangolo.

Ricordando la relazione fondamentale (8) dell'unità A1, si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{2}$$

Ripetendo il ragionamento con le altre altezze del triangolo si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{2'}$$

Enunciato del teorema di Carnot

Sulla base delle (2) e (2′) possiamo formulare il seguente enunciato del teorema di Carnot:

> in un triangolo, il quadrato della lunghezza di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati, dedotta del doppio prodotto delle lunghezze di questi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Il teorema di Carnot può anche venire espresso in un'altra forma, altrettanto importante, ottenuta dalle (2) e (2′) isolando i *coseni*:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned} \tag{3}$$

F.A.Q.

Il teorema di Carnot in passato veniva poco utilizzato. Perché?

Perché non è adattabile al calcolo logaritmico con cui si sviluppavano i calcoli in ambito topografico prima della disponibilità delle calcolatrici.

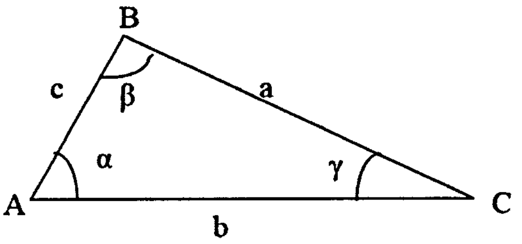
Il teorema di Carnot era poco usato fino ad alcuni anni or sono, in quanto non esprimibile in *forma logaritmica* e perciò difficoltoso da utilizzare senza appropriati strumenti di calcolo. Al contrario, con l'avvento delle calcolatrici e con il conseguente superamento di ogni problema connesso allo sviluppo di qualsiasi calcolo, il teorema di Carnot è il più utilizzato per risolvere molti problemi trigonometrici.

Questo teorema viene attribuito al matematico francese **Lazare Carnot** (1753-1823), padre del più noto fisico Sadi Carnot. Tuttavia, in realtà, sembra che questo teorema sia da ascrivere al matematico e uomo politico francese **François Viète** (1545-1603), fondatore del calcolo algebrico letterale.

/ 3BIS

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI QUALSIASI

1) Sono noti due lati e l'angolo compreso.



Si calcola la lunghezza del lato a mediante il teorema di Carnot. Sono allora noti i tre lati.
Per determinare gli altri angoli, si può utilizzare ancora il teorema di Carnot; in tal modo si trova ad esempio cos β, che individua l'angolo in modo univoco. Il terzo angolo lo si trova per differenza.

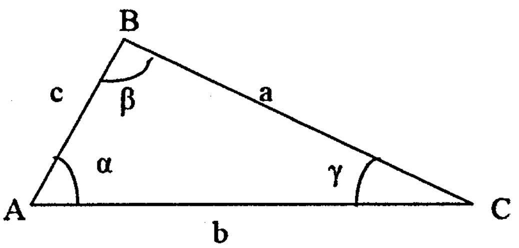
Oppure, volendo fare calcoli più rapidi, si utilizza il teorema dei seni: $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$, da cui si ricava sen β. Se sen β = 1, β = 90°. Se sen β <1, nella maggior parte dei casi, è evidente se β è acuto od ottuso dalla figura, purché disegnata con discreta precisione; nel caso vi sia una certa ambiguità, si può, ad esempio, confrontare la lunghezza del lato b con l'ipotenusa del triangolo di cateti a e c:

se $b^2 > a^2 + c^2$ allora cos β >0 quindi β è acuto (infatti $\cos\beta = \frac{(a^2 + c^2) - b^2}{2ac}$ per Carnot)

se $b^2 < a^2 + c^2$ allora cos β <0 quindi β è ottuso.
Si calcola poi γ per differenza.

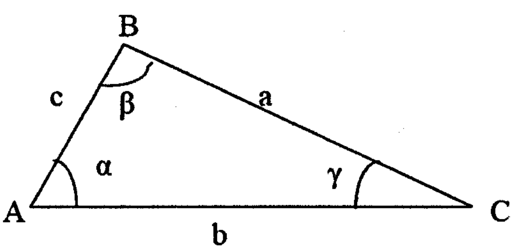
(Il consiglio è quindi di usare il teorema dei seni, calcolando prima il seno dell'angolo che dalla figura risulta più evidentemente acuto o ottuso...).

2) Sono noti i tre lati



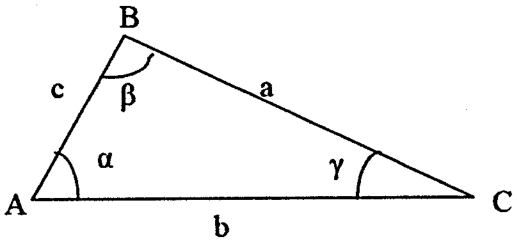
Si calcola il coseno di un primo angolo con il teorema di Carnot; l'angolo risulta determinato univocamente.
Per la determinazione degli altri angoli confronta caso 1).

3) Sono noti due angoli (qualsiasi) e un lato



Essendo noti due angoli, sono noti tutti gli angoli.
Si calcolano gli altri due lati utilizzando il teorema dei seni.

4) <u>Sono noti due lati e l'angolo opposto a uno dei due</u>



Si calcola sen β con il teorema dei seni:

$$sen\beta = \frac{b}{a} sen\alpha$$

Può risultare:

- sen $\beta > 1$, quindi il problema è impossibile;

- sen $\beta = 1$, in tal caso $\beta = 90°$, allora: $\begin{cases} \alpha \geq 90° \rightarrow \\ \alpha < 90° \rightarrow \end{cases}$

$\alpha \geq 90° \rightarrow$	il problema è impossibile
$\alpha < 90° \rightarrow$	una soluzione = triangolo rettangolo

- sen $\beta < 1$, allora: $\begin{cases} b \leq a \rightarrow \beta \leq \alpha \rightarrow \\ b > a \rightarrow \beta > \alpha \rightarrow \end{cases}$

$b \leq a \rightarrow \beta \leq \alpha \rightarrow$		una soluzione: β acuto
$b > a \rightarrow \beta > \alpha \rightarrow$	$\alpha \geq 90°$	nessuna soluzione
	$\alpha < 90°$	due soluzioni: β_1 acuto, β_2 ottuso

Se il problema ammette soluzione, determino per differenza il terzo angolo γ e di conseguenza calcolo il lato c tramite il teorema dei seni.
Se vi sono due angoli β, si avranno due angoli γ e quindi due possibili triangoli risolventi.