10. Risoluzione dei triangoli rettangoli

Osserviamo che nelle definizioni delle funzioni goniometriche compare sempre un **triangolo rettangolo** (o *retto*) in cui un angolo acuto corrisponde all'angolo α (variabile indipendente delle funzioni). Ciò permette di **risolvere** i triangoli retti prendendo in considerazione le funzioni goniometriche.

La **trigonometria** insegna a risolvere i **triangoli scaleni** (senza particolari proprietà), cioè permette di calcolare gli elementi incogniti quando si conoscono **tre elementi** del triangolo, tra i quali deve essere sempre compreso **almeno un lato** (o un altro elemento lineare).

FAQ

▶ **Le notazioni usate nelle calcolatrici tascabili per indicare le funzioni inverse sono formalmente corrette?**

No, sono inoltre fuorvianti in quanto inducono a considerare erroneamente la funzione inversa come l'inverso del valore assegnato. Ciò è giustificato solo dal poco spazio disponibile sui tasti.

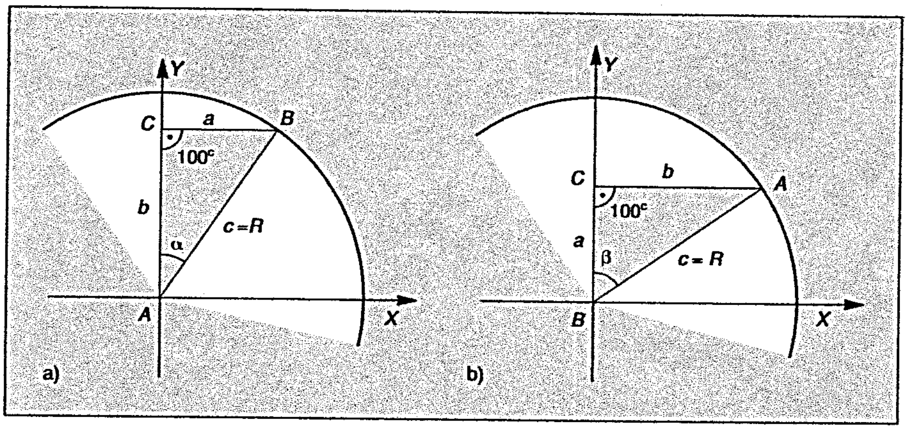


FIGURA 17 Relazioni trigonometriche per un triangolo rettangolo *ABC* assumendo come centro del cerchio adottato il vertice *A* (*a*) o il vertice *B* (*b*).

FAQ

▶ **Quale rapporto intercorre tra gli angoli acuti di un triangolo rettangolo?**
Sono complementari, quindi la loro somma è 90°.

Nel caso di un **triangolo rettangolo** un elemento è sempre noto; questo è l'*angolo retto*. Quindi, per risolvere un triangolo rettangolo basta assegnare **due elementi**, tra i quali **almeno un lato** (o, comunque, un elemento lineare).

Inoltre, indicando con α e β gli angoli acuti del triangolo retto, questi sono complementari quindi legati dalla relazione: $\alpha + \beta = 100^c$, da cui segue:

$$\alpha = 100^c - \beta \qquad \beta = 100^c - \alpha$$

Poiché, come si è detto, le definizioni delle funzioni goniometriche di un angolo orientato non dipendono dal raggio del cerchio adottato ma solo dall'angolo stesso, possiamo allora assumere l'ipotenusa $c = AB$ come raggio di tale cerchio, adottando come *centro* il vertice A e facendo coincidere il segmento $b = AC$ con l'asse Y delle ordinate (▶FIGURA 17*a*).

■ Utilizzo delle funzioni seno e coseno

Pensiamo poi di adottare le *convenzioni letterali* in essa rappresentate ($c = AB$ ipotenusa; $a = BC$ e $b = AC$ cateti; α angolo di vertice A; β angolo di vertice B), e di riformulare in tale ambito le definizioni (2) di seno e coseno, dunque limitandole ai soli angoli acuti:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{10}$$

Dalle relazioni (10) si ricavano immediatamente le seguenti:

$$a = c \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad b = c \cdot \cos\alpha \tag{11}$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha} \tag{12}$$

Possiamo poi rifare la solita costruzione grafica, assumendo sempre l'ipotenusa $c = BA$ come raggio del cerchio, ma adottando, questa volta, come centro il vertice B (anziché A) e facendo coincidere il segmento $a = BC$ (anziché AC) con l'asse Y delle ordinate (▶FIGURA 17*b*). Riformulando le definizioni si ha:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \tag{13}$$

$$b = c \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad a = c \cdot \cos\beta \tag{14}$$

$$c = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad c = \frac{a}{\cos\beta} \tag{15}$$

Dal confronto delle relazioni (11) e (14) e ricordando che ($\beta = 100^c - \alpha$), si vede che nei **triangoli rettangoli** si ha:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha &= \cos\beta = \cos(100^c - \alpha) \\ \cos\alpha &= \text{sen}\,\beta = \text{sen}(100^c - \alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

Utilizzo delle funzioni tangente e cotangente

Allo stesso modo possiamo rivedere le definizioni delle funzioni tangente e cotangente dell'angolo α, riferendole allo schema di ▸FIGURA 17*a* (limitatamente agli angoli **acuti**):

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} \tag{17}$$

$$a = b \cdot \text{tg}\,\alpha \qquad b = a \cdot \text{cotg}\,\alpha = \frac{a}{\text{tg}\,\alpha} \tag{18}$$

Ripetiamo la solita costruzione grafica, assumendo l'ipotenusa $c = BA$ come raggio del cerchio, ma come centro il vertice B (anziché A) e facendo coincidere il segmento $a = BC$ (anziché AC) con l'asse Y delle ordinate (▸FIGURA 17*b*). Riformulando le definizioni delle funzioni tangente e cotangente dell'angolo β (limitatamente agli angoli acuti):

$$\text{tg}\,\beta = \frac{b}{a} \qquad \text{cotg}\,\beta = \frac{a}{b} \tag{19}$$

$$b = a \cdot \text{tg}\,\beta \qquad a = b \cdot \text{cotg}\,\beta = \frac{a}{\text{tg}\,\beta} \tag{20}$$

Osservando le relazioni (18) e (20), si rileva che nei **triangoli rettangoli** si ha:

$$\begin{aligned} \text{tg}\,\alpha &= \text{cotg}\,\beta = \text{cotg}(100^c - \alpha) \\ \text{cotg}\,\alpha &= \text{tg}\,\beta = \text{tg}(100^c - \alpha) \end{aligned} \tag{21}$$

Enunciati relativi alla risoluzione dei triangoli retti

Le relazioni precedenti permettono di proporre i seguenti **enunciati** che consentono la risoluzione dei triangoli retti quando sono incogniti **elementi lineari**:

In ogni triangolo rettangolo, la misura di un **cateto** è uguale al prodotto dell'**ipotenusa** per il **seno** dell'angolo **opposto** a quel cateto, oppure è uguale al prodotto dell'**ipotenusa** per il **coseno** dell'angolo **adiacente** a quel cateto.

In ogni triangolo rettangolo, la misura dell'**ipotenusa** è uguale al rapporto tra un **cateto** e il **seno** dell'angolo **opposto** a questo cateto; oppure è uguale al rapporto tra un **cateto** e il **coseno** dell'angolo a esso **adiacente**.

In ogni triangolo rettangolo, la misura di un **cateto** è uguale al prodotto dell'altro **cateto** per la **tangente** dell'angolo **opposto** al primo cateto, oppure è uguale al prodotto dell'altro **cateto** per la **cotangente** dell'angolo **adiacente** al primo cateto.

La ▸TABELLA **11** sintetizza le modalità risolutive dei triangoli rettangoli nei casi fondamentali determinati dai dati noti di partenza.

FAQ

▸ **È possibile definire le funzioni trigonometriche nell'ambito di un triangolo rettangolo?**

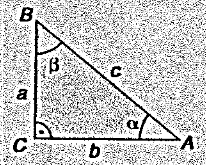
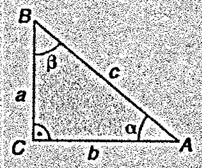
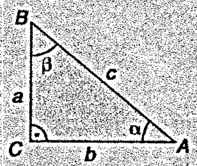
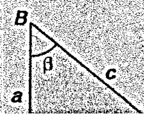
Sì, per gli angoli acuti. Per esempio la funzione seno di un angolo acuto di un triangolo rettangolo viene definita dal rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa dello stesso triangolo.

FAQ

▸ **Esiste una relazione tra le funzioni seno e coseno degli angoli acuti di un triangolo retto?**

Sì, il seno del primo angolo acuto ha lo stesso valore del coseno del secondo.

TABELLA 11 Schemi risolutivi dei triangoli rettangoli

Caso	Schema geometrico	Elementi noti	1ª soluzione	2ª soluzione
1		Ipotenusa c Angolo α	$\beta = 100^c - \alpha$ $a = c \cdot \text{sen}\,\alpha$ $b = c \cdot \cos\alpha$	$\beta = 100^c - \alpha$ $a = c \cdot \cos\beta$ $b = c \cdot \text{sen}\,\beta$
2		Cateto a Angolo α	$\beta = 100^c - \alpha$ $b = a \cdot \text{cotg}\,\alpha$ $c = \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha}$	$\beta = 100^c - \alpha$ $b = a \cdot \text{tg}\,\beta$ $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$
3		Ipotenusa c Cateto a	$\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{a}{c}$ $\beta = 100^c - \alpha$ $b = c \cdot \cos\alpha$	$\beta = \arccos\dfrac{a}{c}$ $\alpha = 100^c - \beta$ $b = c \cdot \text{sen}\,\beta$
4		Cateto a Cateto b	$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{a}{b}$ $\beta = 100^c - \alpha$	$\beta = \text{arctg}\,\dfrac{b}{a}$ $\alpha = 100^c - \beta$

3

1. Relazioni tra lati e angoli di un triangolo qualunque (scaleno)

FAQ

▶ **Sono sufficienti tre elementi per risolvere un triangolo scaleno?**

Sì, purché almeno uno di essi sia un lato (o altro elemento lineare).

Proprietà dei triangoli

Gli elementi di un triangolo qualunque sono i tre lati e i tre angoli. Per convenzione i **vertici** di un triangolo sono indicati con lettere *maiuscole*, in genere A, B, C, mentre con le lettere *minuscole* corrispondenti, a, b, c, si indicano i **lati** opposti ai rispettivi vertici (▶FIGURA 1). Infine, con le lettere minuscole dell'*alfabeto greco* α, β, γ, vengono indicate le ampiezze degli **angoli** con i vertici rispettivamente in A, B, C.

La geometria ci fornisce le seguenti proprietà fondamentali relative agli elementi di un triangolo qualunque:

1. La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale all'angolo piatto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^c$$

2. In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (per esempio, $a < c + b$ e anche $a > c - b$).
3. In ogni triangolo la relazione di uguaglianza o disuguaglianza che intercorre tra due lati vale anche per gli angoli rispettivamente opposti (per esempio, se $a > b$ sarà anche $\alpha > \beta$).

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

Obiettivo della **trigonometria** è quello di *calcolare le misure* degli *elementi incogniti* di un triangolo, quando siano dati **tre elementi**, tra i quali almeno uno deve essere **un lato**. Per raggiungere questo obiettivo, si devono stabilire le **relazioni** che legano le misure dei lati del triangolo con i valori delle funzioni goniometriche dei suoi angoli.

Nei paragrafi precedenti queste relazioni sono già state determinate per i triangoli rettangoli. Peraltro, si potrebbero utilizzare tali relazioni anche per risolvere un triangolo qualunque; in effetti, con ciascuna delle tre **altezze** di un triangolo qualunque, si individuano **due triangoli rettangoli** (▶FIGURA 1), i quali, risolti separatamente, permettono di definire gli elementi incogniti